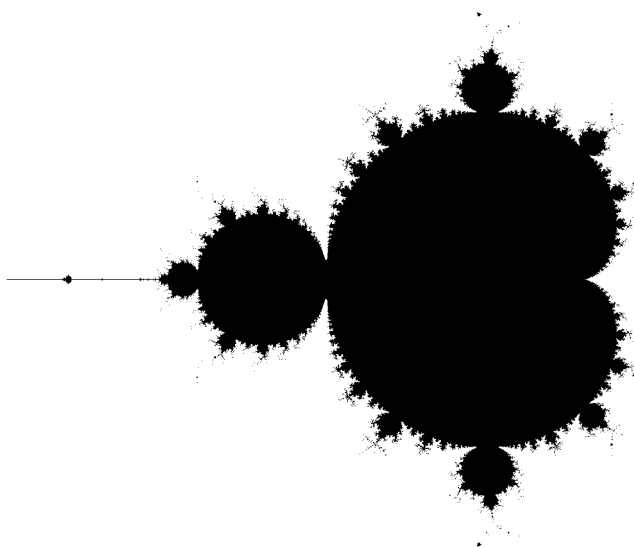

Komplekse polynomiers dynamik

Morten Bakkedal
Asger Jacobsen



15. maj 2003

Forord

Projektet tager udgangspunkt i oversigtsartiklen [1] af Bodil Branner, hvor de forskellige aspekter vedrørende de kvadratiske polynomiers dynamik præsenteres. Artiklen indeholder ikke selv beviser for de fremsatte påstande. I dette projekt har vi søgt at bevise og uddybe udvalgte dele af artiklen. Under arbejdet har vi vist andre for emnet relevante sætninger, hvor vi er stødt på dem.

Vi har i væsentlig grad koncentreret vores arbejde om Böttchers sætning og dens anvendelser. Til beviset for selve Böttchers sætning har vi hentet inspiration i afsnit 6.10 i [3] og i afsnit 9 i [2]. Beviset for udvidelsen af Böttchers sætning har vi selv konstrueret ud fra en kortfattet skitse, som kan findes i [2]. Afsnittet om anvendelser af Böttchers sætning har vi selv konstrueret.

I de andre dele af projektet har vi brugt afsnit 1.1–1.3 i [4], afsnit 2.1–2.2 og 9.10 i [3] og kapitel 8 i [5] som inspirationskilder.

Som led i projektet har vi endvidere brugt programmering til at illustrere og løse vore problemstillinger. Vi har selv udtænkt og udviklet disse programmer gennem analyse af de matematiske sætninger. Koderne findes i bilaget.

Vi takker vores vejleder Jan Philip Solovej for assistance under forløbet.

Indhold

1	Indledning	1
2	Notation og grundlæggende definitioner	2
3	Generelle teknikker	3
3.1	Konjugering	3
3.2	Udvidelse af den komplekse plan	3
3.3	Lokal invertibilitet af holomorfe funktioner	4
3.4	Uendelige produkter	5
4	Polynomiers dynamik under iteration	7
4.1	Baner og cykler	7
4.2	Opdeling af den dynamiske plan	8
5	Böttchers sætning	11
6	Kvadratiske polynomier	18
6.1	Affin konjugering	18
6.2	Parameterplanen	18
6.3	Hyperbolske komponenter	21
6.4	Bifurkationer	24
6.5	Anvendelse af Böttchers sætning på polynomier	25
7	Litteratur	31
A	Pascal-kode	32
A.1	mandelbrot.pas	32
A.2	hyperkomp.pas	33
A.3	feigenbaum.pas	34
A.4	potential.pas	35

1 Indledning

Emnet for dette projekt er dynamikken af komplekse polynomier under iteration med hovedvægt på de kvadratiske polynomier. Vi vil imidlertid gennemgå teorien i en generel ramme, så længe det er muligt og ikke leder os ud ad for store omveje.

Vi begynder med i afsnit 2 og 3 at indføre notation og nogle generelle teknikker, der vil vise sig nyttige i de videre undersøgelser.

De kvadratiske polynomier kan ved affin transformation skrives på formen $P_c(z) = z^2 + c$. Dette åbner for to tilgangsvinkler: Den dynamiske plan, hvor vi holder parameteren c fast, og ser på dynamikken af et fastholdt polynomium, og parameterplanen, hvor vi betragter c som en variabel. Den dynamiske plan undersøges i afsnit 4, mens parameterplanen undersøges i afsnit 6.

Parameterplanen kan på naturlig måde deles op i værdier c for hvilke følgen

$$c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \dots$$

går mod uendelig, og værdier hvor den ikke går mod uendelig. På denne måde fremkommer den kendte Mandelbrot-mængde og vores analyse af parameterplanen bliver til en analyse af denne. Vi viser nogle karakteristiske egenskaber ved Mandelbrot-mængden, herunder dens kompakthed og placering i den komplekse plan.

Mandelbrot-mængden kan videre på naturlig måde deles op efter perioden af c -værdiernes tiltrækkende cykler¹, idet vi viser en sætning, som siger at perioden af den tiltrækkende cykel er konstant på hver sammenhængende komponent. De sammenhængende komponenter er de karakteristiske bobler på Mandelbrot-figuren på forsiden.

I afsnit 5 viser vi nogle tekniske sætninger, der bliver afgørende redskaber for analysen af de kvadratiske polynomier. Vi bruger sætningerne til at vise, at dynamikken for et generelt polynomium P_c er tæt forbundet med dynamikken for det simple polynomium z^2 nær uendelig.

Udviklingen af teorien for dynamik af komplekse funktioner har i de seneste årtier været tæt knyttet til den konstante udvikling af kraftigere computere. Således vil vi løbende i projektet illustrere begreber gennem computerberegnet grafik.

¹Vi undlader her i indledningen at uddybe, hvad der forstås med begreber som "tiltrækkende cykler", men lader i første omgang læseren have en intuitiv fornemmelse for begrebet.

2 Notation og grundlæggende definitioner

Vi vil benytte følgende grundlæggende definitioner:

- (a) S sammensætning af funktioner skrives i multiplikativ notation. Hvis således f og g er to funktioner, betegner vi sammensætningen med fg . Endvidere betegner vi den n -dobbelte sammensætning af f med f^n . Vi lader altid f^0 betegne identitetsafbildningen.
- (b) Til en mængde $A \subseteq \mathbb{C}$ betegnes med \bar{A} afslutningen til A og med A° mængden af indre punkter i A .
- (c) Med $D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$ betegnes den åbne kugle med radius r og centrum i z_0 . I tilfældet $z_0 = 0$ vil vi ofte bruge den kortere notation D_r . Vi vil benytte denne definition uafhængigt af valget af metrik.
- (d) Vi kalder en afbildning $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $a < b$, for en kurve, hvis den er kontinuert, og en vej, hvis den er stykkevis C^1 .
- (e) En mængde $G \subseteq \mathbb{C}$ kaldes sammehængede, hvis hvert par af punkter i G kan forbindes med en kurve, der forløber helt i G . Et område er en åben sammenhængende mængde.
- (f) Mængder på formen $\mathbb{C}_\alpha = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\alpha} \mid r \geq 0\}$ kaldes snitmængder. Hovedargumentet til $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ er det entydige tal $\text{Arg } z \in]-\pi, \pi]$, der opfylder $e^{-i \text{Arg } z} z \in]0, \infty[$. Hovedlogaritmen er den holomorfe afbildning $\text{Log} : \mathbb{C}_\pi \rightarrow \mathbb{C}$ defineret ved $\text{Log } z = \log |z| + \text{Arg } z$.

3 Generelle teknikker

3.1 Konjugering

En teknik vi vil bruge gentagende gange i det følgende er konjugering. Vi siger, at de holomorfe funktioner $f : X \rightarrow X$ og $g : Y \rightarrow Y$ er konjugerede, hvis der findes en bijektiv holomorf funktion $\phi : X \rightarrow Y$ så $\phi f \phi^{-1} = g$, altså hvis nedenstående diagram kommuterer.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

En sådan form for konjugering er en måde at overføre egenskaber fra den ene mængde X til den anden Y og fra funktionen f til g . Hvis vi læser pilen til venstre omvendt, betyder det altså, at g kan beskrives ved først at benytte ϕ^{-1} til at bevæge os op i mængden X . Herefter lader vi i denne mængde f virke for endelig at gå tilbage til Y ved at benytte ϕ .

3.2 Udvidelse af den komplekse plan

Vi ser nu på en måde at udvide den komplekse plan til at omfatte et element betegnet ∞ . Vi forestiller os at den komplekse plan udspænder (x, y) -planen i \mathbb{R}^3 . Vi betragter desuden enhedskuglen

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Den rette linie gennem $w \in \mathbb{C}$ og $\zeta = (0, 0, 1)$ vil skære $S \setminus \{\zeta\}$ i et entydig bestemt punkt \tilde{w} . Det er klart, at der hermed defineres en bijektiv afbildning $\pi : w \mapsto \tilde{w}$ af \mathbb{C} på $S \setminus \{\zeta\}$. Når $|w| \rightarrow \infty$ vil $\pi(w) \rightarrow \zeta$ og det er derfor naturligt at identificere ζ med ∞ .

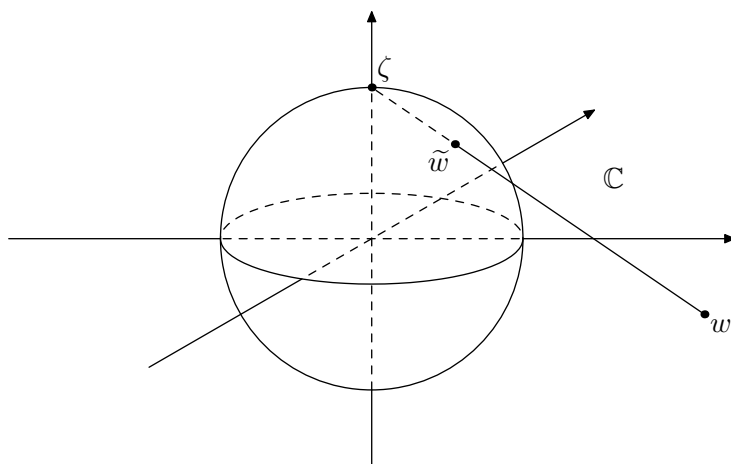
Vi kan nu give $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ en metrik σ , ved at overføre metrikken fra S . For $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ sætter vi

$$\sigma(w_1, w_2) = |\pi(w_1) - \pi(w_2)| = |\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2|.$$

Desuden sætter vi $\sigma(w, \infty) = |\tilde{w} - \zeta|$ for $w \in \mathbb{C}$. Herved bliver π med $\pi(\infty) = \zeta$ en homeomorfi, og $\widehat{\mathbb{C}} = \pi^{-1}(S)$ bliver et kompakt metrisk rum.² Grundet denne konstruktion kalder vi $\widehat{\mathbb{C}}$ for Riemann-sfæren.

Vi bemærker at en følge $\{w_n\}$ i $\mathbb{C} \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ konvergerer mod et $w \in \mathbb{C}$ med hensyn til metrikken fra \mathbb{C} hvis og kun hvis den konvergerer med hensyn til

²Faktisk har vi konstrueret 1-punkts kompaktifikationen af \mathbb{C} (jf. afsnit 2.1 i [3] og sætning 6.16 i [8]).



Figur 1: Den udvidede komplekse plan.

metrikken fra $\widehat{\mathbb{C}}$. Specielt er afslutningen af $A \subseteq \mathbb{C}$ ens i \mathbb{C} og $\widehat{\mathbb{C}}$, såfremt $\infty \notin \bar{A}$ med hensyn til metrikken fra $\widehat{\mathbb{C}}$.

Vi betragter nu en kompleks funktion på formen

$$f(z) = \frac{a(z - a_1) \cdots (z - a_n)}{(z - b_1) \cdots (z - b_m)}.$$

Vi kan antage, at polynomierne i tælleren og nævneren ikke har nogle fælles rødder. Da må f være holomorf på $\mathbb{C} \setminus \{b_1, \dots, b_m\}$. I b_1, \dots, b_m har f poler af orden svarende til multipliciteten af roden. Vi kan vælge $R > 0$, så f er holomorf på $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$. Da er $g : z \mapsto f(z^{-1})$ holomorf på $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < R^{-1}\}$ og har en isoleret singularitet i 0. Generelt siger vi, at f har henholdsvis en hævelig singularitet, en pol eller en essentiel singularitet i ∞ , hvis g har en tilsvarende singularitet i 0. Hvis f således har en hævelig singularitet i ∞ , sætter vi

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 0} g(z).$$

I modsat fald ses let, at f må have en pol i ∞ , og vi sætter $f(\infty) = \infty$. Ligeledes sætter vi $f(b_1) = \dots = f(b_m) = \infty$. Vi har nu konstrueret en funktion $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, og vi kalder generelt funktioner konstrueret på denne måde for rationale funktioner.

I hver pol z_0 vil $f(z) \rightarrow \infty$ for $z \rightarrow z_0$. Derfor er f med den ovenfor givne metrik en kontinuert funktion.

3.3 Lokal invertibilitet af holomorfe funktioner

Hvis vi opfatter en kompleks funktion som en funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, har vi fra inversfunktionssætningen, at f er invertibel i en omegn om et punkt z_0 ,

hvis determinanten af Jacobi-matricen J i dette punkt er forskellige fra 0. For en holomorf funktion er Jacobi-determinanten imidlertid relateret til $f'(z_0)$ ved $|f'(z_0)|^2 = \det J$ (se afsnit 1.3 i [6]). Vi præciserer disse overvejelser ved at gengive sætning 10.30 fra [9]:

Sætning 3.1. *Lad $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ være en holomorf funktion defineret på en åben mængde $G \subseteq \mathbb{C}$. Antag $f'(z_0) \neq 0$ for $z_0 \in G$. Da findes en åben omegn $V \subseteq G$ om z_0 så $f(V)$ er åben og så $f|_V : V \rightarrow f(V)$ har en holomorf invers $f^{-1} : f(V) \rightarrow V$.*

Der gælder også et omvendt resultat, som vi her gengiver fra sætning 1.4 i [6]:

Sætning 3.2. *Antag at $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ er holomorf på en åben mængde $G \subseteq \mathbb{C}$ og at f er injektiv. Så er $f(G)$ åben, og den inverse $f^{-1} : f(G) \rightarrow G$ er holomorf med*

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}$$

for $z \in G$. Specielt er $f'(z) \neq 0$ for alle $z \in G$.

Hvis en holomorf funktion er bijektiv, er den inverse derfor også holomorf. Af denne grund betegnes en sådan funktion ofte en analytisk isomorfi. Vi vil dog ikke bruge denne betegnelse. I det følgende vil vi gentagende gange bruge ovenstående resultater uden videre bemærkninger.

3.4 Uendelige produkter

I lighed med at vi kan give mening til symbolet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ved grænseværdier, kan vi bruge samme metoder til at definere et uendeligt produkt.

Definition 3.3. *Lad $\{a_n\}$ være en følge af komplekse tal. Vi siger, at det uendelige produkt $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer, hvis $\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N a_n$ konvergerer, og sætter i bekræftende fald $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N a_n$.*

Sætning 3.4. *Hvis $A = \prod_{n=1}^{\infty} a_n$ vil $|A| = \prod_{n=1}^{\infty} |a_n|$ og hvis $A \neq 0$ vil desuden $A^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty} a_n^{-1}$.*

Bevis. Beviset er oplagt. □

Vi minder om, at en følge af komplekse funktioner konvergerer lokalt uniformt på en åben mængde $G \subseteq \mathbb{C}$, hvis følgen konvergerer uniformt på enhver kompakt delmængde af G . For resultater vedrørende lokal uniform konvergens henvises til afsnit 4.4 og især sætning 4.17 i [6].

Sætning 3.5. *Lad $G \subseteq \mathbb{C}$ være en åben mængde og lad $\{g_n\}$ være en følge af kontinuerte funktioner på G med billede i $\mathbb{C}_\pi = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. Antag at $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Log} g_n(z) \rightarrow S(z)$ lokalt uniformt på G . Da vil $\prod_{n=1}^{\infty} g_n(z) \rightarrow \exp S(z)$ lokalt uniformt på G .*

Bevis. Lad $K \subseteq G$ være kompakt. Lad $M = \sup_{z \in K} |\exp S(z)|$. Antag $0 < \varepsilon < 2M$. Vi kan vælge et N så der for snitfølgen $S_n(z) = \sum_{i=1}^n \text{Log } g_i(z)$ på K gælder at $|S_n(z) - S(z)| < \varepsilon/(2M)$ for alle $n \geq N$.

Det er let at overbevise sig om, at $2^{n-1} \leq n!$, så der gælder for alle $|w| < \varepsilon/(2M) < 1$ at

$$|e^w - 1| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \right| \leq |w| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|w|^{n-1}}{n!} \leq |w| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leq |w| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n} = 2|w|,$$

og vi ser heraf at

$$\left| \prod_{i=1}^n g_i(z) - \exp S(z) \right| < \varepsilon |\exp S(z)|/M \leq \varepsilon,$$

hvilket viser det ønskede. \square

Sætning 3.6. Lad $\{f_n\}$ være en følge af holomorfe funktioner defineret på et område G . Antag at $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ har en konvergent majorantrække. Da konvergerer

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$$

lokalt uniformt på G og grænsefunktionen er dermed holomorf.

Bevis. Lad $K \subseteq G$ være kompakt. Vi kan vælge N så $|f_n(z)| < 1/2$ for alle $z \in K$ og $n \geq N$. For $|w| < 1/2$ har vi vurderingen

$$|\text{Log}(1+w)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{w^n}{n} \right| \leq |w| \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(n+1)} \right) \leq 3|w|/2,$$

hvorfor $|\text{Log}(1+f_n(z))| \leq 3|f_n(z)|/2$. Det er nu klart, at $\text{Log}(1+f_n(z))$ konvergerer uniformt på K . Påstanden følger nu af sætning 3.5 og sætningen om lokal uniform konvergens af holomorfe funktioner. \square

4 Polynomiers dynamik under iteration

I dette afsnit betragter vi et generelt normeret komplekst polynomium

$$P(z) = z^k + a_{k-1}z^{k-1} + \dots + a_1z + a_0.$$

4.1 Baner og cykler

Definition 4.1. For et polynomium P kaldes følgen

$$z_0, z_1 = P(z_0), z_2 = P^2(z_0), \dots, z_n = P^n(z_0), \dots$$

for banen af z_0 .

Definition 4.2. Hvis der findes et $k > 0$ så $z_k = z_0$ og $z_i \neq z_0$ for alle $i = 1, \dots, k-1$, siger vi, at banen er periodisk og z_0 et periodisk punkt med periode k . Et punkt med periode $k = 1$ kaldes et fikspunkt.

En periodisk bane kaldes også en cykel. Vi vil ofte tænke på den som en endelig ordnet mængde i stedet for en følge.

Definition 4.3. For et periodisk punkt z_0 med periode k kaldes

$$\rho = (P^k)'(z_0)$$

cyklens multiplikator.

Ved at bruge kædereolen kan vi skrive multiplikatoren på formen

$$\rho = (P^k)'(z_0) = (P^{k-1})'(z_1)P'(z_0) = \dots = P'(z_{k-1}) \cdots P'(z_0).$$

Specielt ses at multiplikatoren er ens for alle punkter i cyklen.

Definition 4.4. En cykel kaldes tiltrækkende hvis $|\rho| < 1$, supertiltrækkende hvis $\rho = 0$, frastødende hvis $|\rho| > 1$ og neutral hvis $|\rho| = 1$.

Endvidere siges en cykel af længde k frembragt af z_0 at tiltrække z'_0 , hvis der findes et $0 \leq l < k$ så

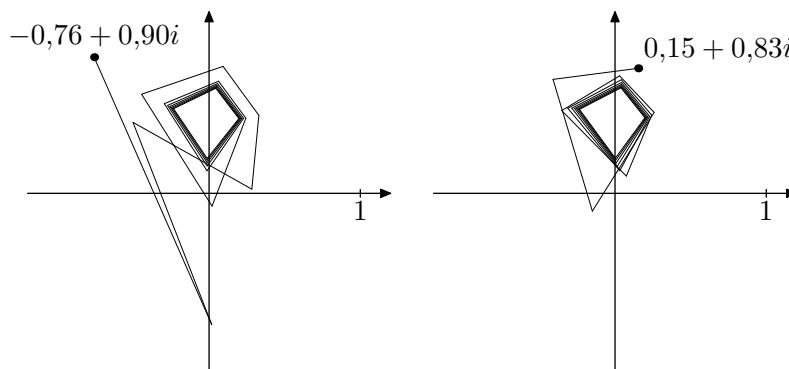
$$\lambda_n = \max_{0 \leq i < k} |z_i - z'_{nk+l+i}| \rightarrow 0. \quad (4.1)$$

Potensrækken for P^k omkring det periodiske punkt z_0 af periode k har formen

$$P^k(z) = P^k(z_0) + (P^k)'(z_0)(z - z_0) + \dots = z_0 + \rho(z - z_0) + \dots$$

Hvis z er tilstrækkelig tæt på z_0 og $|\rho| < 1$, ser vi derfor at iterationerne $z, P^k(z), P^{2k}(z), \dots$ vil nærme sig z_0 . Tilsvarende vil iterationerne fjerne sig fra z_0 , hvis $|\rho| > 1$. Dette forklarer vores navngivning af cyklerne.

For at anskueliggøre hvordan et punkt tiltrækkes til en cykel, har vi på figur 2 tegnet banerne for to punkter. Punkterne er valgt, så de begge tiltrækkes af den samme cykel af periode 4. Denne periode er ikke tilfældig, men er valgt ved hjælp af figur 5. Vi vil gennemgå matematikken bag denne figur i detaljer i afsnit 6.3.



Figur 2: To baner for polynomiet $z^2 + (0,25 + 0,50i)$.

Definition 4.5. *Et punkt $z \in \mathbb{C}$ kaldes et kritisk punkt for P , hvis $P'(z) = 0$. Mængden af kritiske punkter betegnes C_P .*

Vi angiver nedenstående sætning uden bevis. Sætningen viser sig at være praktisk, især til vores computerberegninger i det følgende. Et bevis kan findes som sætning 8.6 i [2]; se også de efterfølgende bemærkninger i denne.

Sætning 4.6 (Fatou). *Enhver tiltrækkende cykel for et polynomium tiltrækker mindst et kritisk punkt.*

Dette er første eksempel på, at dynamikken for et polynomium i vid udstrækning er bestemt af de kritiske punkter. Som vi vil se i afsnit 6.3, kan vi bruge dette resultat til at finde de mulige tiltrækkende cykler blot ved at kigge på de endelig mange kritiske punkter.

Korollar 4.7. *Et polynomium P af grad $d \geq 2$ har højst $d - 1$ tiltrækkende cykler.*

Bevis. Af (4.1) er det klart, at et punkt ikke kan tiltrækkes af to forskellige cykler. Korollaret følger derfor af, at P højst har $d - 1$ kritiske punkter. \square

4.2 Opdeling af den dynamiske plan

Vi kan opdele den komplekse plan efter konvergens under iteration af polynomiet. Til vores undersøgelser er det tilstrækkeligt at dele planen op i nedenstående to mængder. Når vi således betragter dynamikken af forskellige komplekse tal under et fastholdt polynomium, vil vi bruge betegnelsen den dynamiske plan for den komplekse plan. Senere vil vi under en parameter betragte en hel familie af forskellige polynomier.

Definition 4.8. *Lad*

$$I_P = \{z \in \mathbb{C} \mid P^n(z) \rightarrow \infty\}.$$

Mængden $K_P = \mathbb{C} \setminus I_P$ kaldes den fyldte Julia-mængde. Randen $J_P = \partial K_P$ kaldes Julia-mængden.

Definition 4.9. *En mængde A kaldes totalt invariant under polynomiet P , hvis $A = P(A) = P^{-1}(A)$.*

Sætning 4.10. *Lad P være et polynomium af grad mindst 2. Da gælder følgende:*

- (a) K_P er kompakt og ikke-tom.
- (b) I_P er et område.
- (c) Mængderne K_P , J_P og I_P totalt invariante under P .

Bevis. (a) Da graden af P er mindst 2, vil $P(z) - z$ altid have en rod z_0 . Det er klart, at $z_0 \in K_P$, som derfor ikke er tom.

Ved at vælge et tilstrækkeligt stort R vil $V = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$ opfylde $P(V) \subseteq V \subseteq I_P$. Vi ønsker nu at vise

$$I_P = \bigcup_{n=1}^{\infty} (P^n)^{-1}(V). \quad (4.2)$$

Antag først at $z \in (P^n)^{-1}(V)$. Da er $P^n(z) \in V \subseteq I_P$, og således også $z \in I_P$. Hvis omvendt $P^n(z) \rightarrow \infty$ findes et N så $P^N(z) \in V$.

Da V er åben og P^n kontinuert, ses at I_P er åben. Dermed er K_P afsluttet, så sammen med $K_P \subseteq \mathbb{C}V$ ses, at K_P er kompakt.

(b) Hvis $(P^n)^{-1}(V)$ ikke er sammenhængende, findes en åben sammenhængende komponent G , der kan antages at være begrænset af R , idet $V \subseteq (P^n)^{-1}(V)$. For $z \in G$ er $|P^n(z)| > R$, mens der for et randpunkt $z \in \partial G$ gælder, at $|P^n(z)| \leq R$. Dette er i modstrid med maksimumsprincippet (sætning 8.2 i [6]).

Da

$$P^{-1}(V) \subseteq (P^2)^{-1}(V) \subseteq \dots \subseteq (P^n)^{-1}(V) \subseteq \dots \quad (4.3)$$

sluttes, at også I_P er sammenhængende.

(c) Vi bemærker først, at da P har grad mindst 2, er P surjektiv, og der gælder derfor $P(P^{-1}(A)) = A$ for enhver delmængde $A \subseteq \mathbb{C}$.

Vi har $P^{-1}((P^n)^{-1}(V)) = (P^{n+1})^{-1}(V)$, og derfor fås af (4.2) og (4.3) at $P^{-1}(I_P) = I_P$, og af ovenstående dermed også $I_P = P(P^{-1}(I_P)) = P(I_P)$. Videre har vi $P^{-1}(K_P) = P^{-1}(\mathbb{C} \setminus I_P) = P^{-1}(\mathbb{C}) \setminus P^{-1}(I_P) = \mathbb{C} \setminus I_P = K_P$, og således også $K_P = P(K_P)$.

Endelig er $P^{-1}(K_P^\circ) \subseteq P^{-1}(K_P) = K_P$, så da P er kontinuert, er $P^{-1}(K_P^\circ)$ åben, og dermed må $P^{-1}(K_P^\circ) \subseteq K_P^\circ$. Ligeledes, da P er åben,

må $P(K_P^\circ) \subseteq K_P^\circ$. Vi har derfor $K_P^\circ \subseteq P^{-1}(P(K_P^\circ)) \subseteq P^{-1}(K_P^\circ)$. Af dette får vi $P^{-1}(J_P) = P^{-1}(K_P \setminus K_P^\circ) = P^{-1}(K_P) \setminus P^{-1}(K_P^\circ) = K_P \setminus K_P^\circ = J_P$, og derfor også $J_P = P(J_P)$. \square

Vi angiver nedenstående sætning uden bevis. Den er bevist som sætning 1.1.4 i [4].

Sætning 4.11. *Lad P være et polynomium af grad mindst 2. Da er K_P sammenhængende hvis og kun hvis $I_P \cap C_P = \emptyset$.*

Vi ser igen, hvordan de kritiske punkter spiller en afgørende rolle for et polynomiums dynamik.

For polynomiet $P_c(z) = z^2 + c$ er $C_{P_c} = \{0\}$. Vi viser i sætning 6.9, at hvis $0 \notin I_{P_c}$, så er K_{P_c} sammehængende. Dermed viser vi i dette tilfælde den ene implikation i ovenstående sætning.

5 Böttchers sætning

Inden vi fortsætter med at kigge på kvadratiske polynomier, vil vi i dette afsnit vise en række sætninger, der beskriver en holomorf funktion f lokalt eller på hele definitionsområdet ved en konjugering til et simpelt polynomium $z \mapsto z^k$. Vi viser at der under passende betingelser findes en entydig bestemt holomorf funktion ϕ , så $(\phi f \phi^{-1})(z) = z^k$. Dette giver os et nyttigt værktøj til at beskrive dynamikken af f , idet iteration n gange af f i et punkt z bortset fra konjugeringen er simpel potensopløftning $f^n(z) = \phi^{-1}(\phi(z)^{nk})$.

Lemma 5.1. *Antag $n \geq 2$ og lad $W = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - 1| < 1/2\}$. Lad $z^{1/n}$ være den principale n 'te rod af z i W . Da gælder vurderingen*

$$|z^{1/n} - 1| < \frac{2}{n}|z - 1| < \frac{1}{n}.$$

Bevis. Da $W \subseteq \mathbb{C}_\pi = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, kan vi definere den principale rod ved $z^{1/n} = e^{\text{Log } z/n}$, der klart er holomorf på W . Lad nu

$$f(z) = \frac{d}{dz}(z^{1/n}) = \frac{d}{dz}(e^{\text{Log } z/n}) = \frac{1}{n}e^{(1/n-1)\text{Log } z}.$$

Fundamentalsætningen for integration langs en vej giver

$$|z^{1/n} - 1| = \left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leq L(\gamma)M,$$

hvor γ er en vej fra 1 til z i W og $M = \sup_{z \in W} |f(z)|$. Vi har

$$|f(z)| = \frac{1}{n}e^{(1/n-1)\log |z|},$$

idet $\text{Log } z = \log |z| + i \text{Arg } z$. Denne funktion er aftagende i $|z|$, så

$$|f(z)| < \frac{1}{n}e^{(1/n-1)\log(1/2)} = \frac{1}{n}2^{1-1/n} < \frac{2}{n}.$$

Påstanden følger nu af $L(\gamma) \leq |z - 1|$. □

Sætning 5.2 (Böttcher). *Lad f være en kompleks funktion, der har potensrækken*

$$f(z) = z^k + b_1 z^{k+1} + b_2 z^{k+2} + \dots,$$

$k \geq 2$, i en omegn om 0. Da findes en entydig funktion ϕ , der er holomorf i en omegn D_r om 0 med $\phi(0) = 0$ og $\phi'(0) = 1$, og som opfylder

$$\phi(f(z)) = \phi(z)^k$$

for alle $z \in D_r$.

At $\phi'(0) \neq 0$ betyder som omtalt i afsnit 3.3, at der findes en lokal invers ψ_ε til ϕ defineret på en omegn D_ε om 0. Böttchers sætning viser dermed, at f lokalt er konjugeret til $z \mapsto z^k$.

Bevis. Lad

$$h(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \dots$$

Herved defineres en holomorf afbildning, der opfylder $f(z) = z^k(1 + h(z))$. Da $h(0) = 0$, kan vi vælge et $r \in]0, 1/2[$, så $|h(z)| < 1/2$ for $z \in D_r$. Dermed er

$$|f(z)| = |z|^k |1 + h(z)| \leq |z|^2 (1 + |h(z)|) \leq |z|$$

for $z \in D_r$, og vi ser, at $f(D_r) \subseteq D_r$. Induktivt følger nu for $n \geq 0$, at $f^n(D_r) \subseteq D_r$. Videre gælder

$$f^{n+1}(z) = f(f^n(z)) = f^n(z)^k [1 + h(f^n(z))],$$

hvor $|h(f^n(z))| < 1/2$. Heraf følger $1 + h(f^n(z)) \in \{w \in \mathbb{C} \mid |w - 1| < 1/2\}$, så lemma 5.1 giver, at vi kan definere en holomorf funktion h_{n+1} på D_r , så

$$h_{n+1}(z)^{k^{n+1}} = 1 + h(f^n(z))$$

og

$$|h_{n+1}(z) - 1| < \frac{1}{k^{n+1}}$$

Sætning 3.6 giver derfor, at

$$\phi(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} h_n(z) \tag{5.4}$$

er konvergent og definerer en holomorf funktion på D_r . Vi har at $\phi(0) = 0$, og ved produktreglen ser vi

$$\phi'(0) = \prod_{n=1}^{\infty} h_n(0) = 1.$$

Da nu

$$[h_{n+1}(f(z))]^{k^{n+1}} = 1 + h(f^{n+1}(z)) = h_{n+2}(z)^{k^{n+2}} = [h_{n+2}(z)^k]^{k^{n+1}},$$

og $h_{n+1}(f(0)) = h_{n+2}(0)^k = 1$, må $h_{n+1}(f(z)) = h_{n+2}(z)^k$.

Lad endelig $\phi_n(z) = z h_1(z) \cdots h_n(z)$. Vi ser

$$\begin{aligned} \phi_n(f(z)) &= f(z) h_1(f(z)) \cdots h_n(f(z)) \\ &= f(z) [h_2(z) \cdots h_{n+1}(z)]^k \\ &= \phi_{n+1}(z)^k, \end{aligned}$$

da $f(z) = z^k(1 + h(z)) = z^k h_1(z)^k$. Vi slutter at $\phi(f(z)) = \phi(z)^k$.

For at vise entydigheden, lad ϕ_1 og ϕ_2 være to funktioner, der konjugerer f til z^k . Da er det let at se, at $\phi = \phi_1 \phi_2^{-1}$ konjugerer z^k til sig selv, hvor de begge har en veldefineret invers, altså at $\phi(z^k) = \phi(z)^k$.

Antag at potensrækken for ϕ i 0 har led af orden større end 1, og lad n være ordenen af det mindste sådanne led. Da $\phi(0) = 0$ og $\phi'(0) = 1$ ved sætning 3.2, kan vi skrive ϕ på formen

$$\phi(z) = z + a_n z^n + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i z^i.$$

Nu må

$$\phi(z)^k = z^k + k a_n z^{n+k-1} + \sum_{i=n+k}^{\infty} b_i z^i$$

ved udregning af potensopløftningen af summen.³ Omvendt må

$$\phi(z^k) = z^k + a_n z^{nk} + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i z^{ik},$$

og da $k < n + k - 1 < nk$, må $a_n = 0$ i modstrid med valget af n . Altså er ϕ identitetsafbildningen, så $\phi_1(z) = \phi_2(z)$ i en omegn om 0 og dermed overalt, hvor de begge er definerede, ved identitetssætningen. \square

Vi betragter nu en rational funktion $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$, der nær 0 har potensrækkeudvikling som krævet i Böttchers sætning. Vi vil vise, at f ikke bare lokalt omkring 0 kan konjugeres til $z \mapsto z^k$, men at dette gælder for alle punkter $A_0 = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid f^n(z) \rightarrow 0\}$, der under iteration tiltrækkes af 0. Vi viser dette, ved at vise der findes en udvidelse af ϕ , der opfylder konjugeringsrelationen på hele A_0 . Vi starter med at give en udvidelse af $|\phi|$ i følgende lemma.

Lemma 5.3. *Lad $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ være en rational funktion. Hvis f opfylder betingelserne fra Böttchers sætning, kan $|\phi|$ udvides til en kontinuert funktion $g : A_0 \rightarrow [0, 1[$. Udvidelsen er entydig bestemt, hvis vi kræver $g(f(z)) = g(z)^k$ for alle $z \in A_0$.*

Bevis. Lad $z \in A_0$. Fra et vist trin N må $f^n(z)$ ligge i definitionsområdet for ϕ når $n \geq N$. Definer nu

$$g(z) = |\phi(f^N(z))|^{1/k^N}.$$

Det følger induktivt af

$$|\phi(f^{n+1}(z))|^{1/k^{n+1}} = |\phi(f^n(z))^k|^{1/k^{n+1}} = |\phi(f^n(z))|^{1/k^n}$$

³Generelt gælder $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + \dots + a_n b_0) z^n$ for konvergente rækker; se afsnit 3.4 i [7].

at g er uafhængig af valget af N . Da ϕ er kontinuert og $\phi(0) = 0$, kan vi antage $|\phi(f^N(z))| < 1$, så $g(A_0) \subseteq [0, 1[$ er klar. Lad $\{z_n\}$ være en følge i A_0 , der konvergerer mod z . Ved kontinuiteten af f^N , kan vi antage at

$$g(z_n) = |\phi(f^N(z_n))|^{1/k^N}$$

fra et vist trin i følgen. Dette viser, at g er kontinuert.

Endelig er $g(f(z)) = g(z)^k$ ved konstruktionen af g . Omvendt er det klart, at enhver udvidelse, der opfylder dette, også vil opfylde den definerende ligning for g . \square

Umiddelbart ville det være nærliggende blot at definere en udvidelse af ϕ på tilsvarende måde. Det er imidlertid ikke oplagt, at vi kan definere udvidelsen som en holomorf funktion ved rodudtagning på en snitmængde \mathbb{C}_α af $\phi(f^N(z))$ for et passende stort N . I stedet viser det sig at være fordelagtigt at kigge på den lokalt inverse ψ_ε .

For at undgå alt for komplicerede problemstillinger i forbindelse med holomorfe funktioner på Riemann-sfæren $\widehat{\mathbb{C}}$, vil vi i det følgende antage $\infty \notin A_0$. Dette viser sig at være tilstrækkeligt til vores anvendelse i afsnit 6.5. Yderligere viser vi, at A_0 er sammenhængende i vores konkrete tilfælde. Vi vil derfor også antage dette under beviset. En mere generel gennemgang er skitseret i kapitel 9 i [2]. Vi angiver her den generelle sætning:

Sætning 5.4. *Lad $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ være en rational funktion, der tilfredsstiller betingelserne fra Böttchers sætning. Der er to muligheder for den lokalt inverse ψ_ε til Böttcher-funktionen ϕ :*

- (a) ψ_ε kan udvides til en bijektiv holomorf funktion

$$\psi : D_1 \rightarrow A_0.$$

I dette tilfælde er $f'(z) \neq 0$ for alle $z \in A_0 \setminus \{0\}$.

- (b) Der findes et største $r \in]0, 1[$ så ψ_ε kan udvides til en injektiv holomorf funktion

$$\psi : D_r \rightarrow A_0.$$

Med billedet af D_r betegnet U er $\overline{U} \subseteq A_0$ i $\widehat{\mathbb{C}}$ og der findes et $z \in \partial U$ så $f'(z) = 0$.

I begge tilfælde er udvidelsen entydig og opfylder $f(\psi(w)) = \psi(w^k)$ for alle w i definitionsområdet.

Sætningen anviser en måde at skelne mellem de to tilfælde på. For hvis vi kan vise, at $f'(w) \neq 0$ for alle $w \in A_0 \setminus \{0\}$, er tilfældet (b) udelukket, da 0 er et indre punkt for U . Dette vil vi bruge i næste afsnit. I tilfældet (a) må endvidere $g = |\psi^{-1}|$ ved entydigheden i lemmaet.

Vi bemærker, at konjugeringsrelationen fra Böttchers sætning oversættes til $f(\psi_\varepsilon(w)) = \psi_\varepsilon(w^k)$ for den lokalt inverse. Sætningen bevises i en række trin.

Påstand. Der findes største $r \in]0, 1]$ så ψ_ε kan udvides til en holomorfe funktion $\psi : D_r \rightarrow A_0$. Funktionen opfylder $f(\psi(w)) = \psi(w^k)$ for $w \in D_r$ og er lokalt injektiv.

Bevis. Vi bemærker først at $f(A_0) \subseteq A_0$, og at f på A_0 er en endelig holomorfe funktion. Lad nu

$$r = \sup \{r' \in]0, 1] \mid \psi_\varepsilon \text{ kan udvides holomorft til } \psi_{r'} : D_{r'} \rightarrow A_0\}.$$

Antag $\{r_n\}$ er en voksende følge i $]0, r[$, der konvergerer mod r . Da er

$$D_{r_1} \subseteq D_{r_2} \subseteq \dots \subseteq D_{r_n} \subseteq \dots$$

og $D_r = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{r_n}$. Det er derfor klart, at vi kan definere en holomorfe udvidelse $\psi : D_r \rightarrow A_0$. Nu er $f(\psi(w))$ og $\psi(w^k)$ to holomorfe funktioner, der stemmer overens i en omegn om 0. De må derfor være identiske på hele D_r ifølge identitetssætningen.

Antag for $w \in D_r \setminus \{0\}$ at $\psi'(w) = 0$. Ved kædereglene er

$$f'(\psi(w))\psi'(w) = \psi'(w^k)kw^{k-1}, \quad (5.5)$$

så $\psi'(w^k) = 0$. Induktivt fås en følge

$$w, w^k, w^{k^2}, \dots, w^{k^n} \rightarrow 0,$$

hvor $\psi'(w^{k^n}) = 0$, i modstrid med at ψ er injektiv nær 0. □

Påstand. For $w \in D_r$ er $g(\psi(w)) = |w|$. Hvis desuden $w' \in D_r$, er specielt $|w| = |w'|$, når blot $\psi(w) = \psi(w')$.

Bevis. Ved at vælge N tilstrækkelig stor fås

$$g(\psi(w)) = |\phi(f^N(\psi(w)))|^{1/k^N} = \dots = |\phi(\psi_\varepsilon(w^{k^N}))|^{1/k^N} = |w|$$

som ønsket. □

Påstand. Mængden

$$I = \{(w_1, w_2) \in D_r^2 \mid w_1 \neq w_2, \psi(w_1) = \psi(w_2)\}$$

er afsluttet i $D_r^2 \subseteq \mathbb{C}^2$.

Bevis. Antag $I \neq \emptyset$. Lad $\{(w_1^n, w_2^n)\}$ være en følge i I , der konvergerer mod $(w_1, w_2) \in D_r^2$. Funktionen $(w_1, w_2) \mapsto \psi(w_1) - \psi(w_2)$ defineret på D_r^2 er kontinuert, så $\psi(w_1^n) - \psi(w_2^n) \rightarrow \psi(w_1) - \psi(w_2)$. Dette giver $\psi(w_1) = \psi(w_2)$. Antag $w_1 = w_2$. Vi kan antage, ψ er injektiv på en omegn V om $w_1 = w_2$. Fra et vist trin N må $w_1^N, w_2^N \in V$. Da $\psi(w_1^N) = \psi(w_2^N)$, må $w_1^N = w_2^N$ i modstrid med $(w_1^N, w_2^N) \in I$. □

Påstand. Funktionen ψ er injektiv. Billedet $U = \psi(D_r)$ er åbent og den inverse $\psi^{-1} : U \rightarrow D_r$ er holomorf.

Bevis. Antag $I \neq \emptyset$. Det er da klart, at vi kan vælge et $r' < r$ så

$$I' = \{(w_1, w_2) \in I \mid |w_1| = |w_2| \leq r'\}$$

er en kompakt ikke-tom delmængde af D_r^2 . På I' antager den kontinuerte funktion $(w_1, w_2) \mapsto |w_1| = |w_2|$ derfor minimum i et punkt (w'_1, w'_2) . Det er klart, at dette er minimum på hele I , samt at $(w'_1, w'_2) \neq (0, 0)$.

Lad nu

$$F(w_1, w_2) = \psi(w_1) - \psi(w_2).$$

Da $\psi'(w'_2) \neq 0$ fås ved implicitfunktionssætningen en kontinuert funktion $w_1 \mapsto w_2(w_1)$ i en omegn V om w'_1 med egenskaberne $F(w_1, w_2(w_1)) = 0$ og $w_2(w'_1) = w'_2$. Vi kan vælge $w''_1 \in V$ med $|w''_1| < |w'_1|$ og sætte $w''_2 = w_2(w''_1)$. Dermed er $\psi(w''_1) = \psi(w''_2)$. Hvis vi antager w''_1 valgt tilstrækkelig tæt på w'_1 , må $w''_1 \neq w'_1$ på grund af kontinuiteten af $w_1 \mapsto w_2(w_1)$. Således har vi $(w''_1, w''_2) \in I$ i modstrid med valget af (w'_1, w'_2) . Altså er $I = \emptyset$ og ψ er injektiv. De sidste påstande følger af sætning 3.2. \square

Påstand. Antag $r = 1$. Da er $U = A_0$ og $f'(z) \neq 0$ for alle $z \in A_0 \setminus \{0\}$.

Bevis. Vi ønsker at vise $\partial U \cap A_0 = \emptyset$. Antag derfor $z \in \partial U \cap A_0$ og lad $\{z_n\}$ være en følge i U , der konvergerer mod z . Definer desuden følgen $\{w_n\}$ ved $w_n = \psi^{-1}(z_n)$. Da \overline{D}_1 er kompakt, kan vi vælge en konvergent delfølge $\{w_{n_j}\}$, der antages at konvergere mod $w \in \overline{D}_1$. Vi må have at $|w| = 1$, da ellers

$$z = \lim_{j \rightarrow \infty} z_{n_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \psi(w_{n_j}) = \psi(w)$$

i modstrid med $z \notin U$.

Endelig da $z \in A_0$, må

$$g(z) = \lim_{j \rightarrow \infty} g(z_{n_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} g(\psi(w_{n_j})) = \lim_{j \rightarrow \infty} |w_{n_j}| = |w| = 1$$

i modstrid med $g(A_0) \subseteq [0, 1[$. Altså må som ønsket $\partial U \cap A_0 = \emptyset$, og da A_0 er sammenhængende, får vi $U = A_0$.⁴

Lad endelig $z \in A_0 \setminus \{0\}$ og lad $w = \psi^{-1}(z)$. Vi ser af (5.5) at $f'(z) \neq 0$, da $w \neq 0$ og ψ er injektiv. \square

⁴Randen af U i delrummet A_0 er netop $\partial_{A_0} U = \partial U \cap A_0$. Da randen således er tom, må U være både åben og afsluttet relativt til A_0 . Antagelsen om at A_0 er sammenhængende giver derfor $U = A_0$ eller $U = \emptyset$. Kun det første er muligt. (Se definition 8.3 og sætning 8.11 i kapitel 2 i [8]; bemærk dog at denne bruger betegnelsen kurvesammenhængende for det vi kalder sammenhængende.)

Påstand. Antag $r < 1$. Da er $\overline{U} \subseteq A_0$, og der findes et $z \in \partial U$, så $f'(z) = 0$.

Bevis. Da f er kontinuert på $\widehat{\mathbb{C}}$, og da $\psi(\overline{D}_r^k)$ er afsluttet, må

$$f(\overline{U}) \subseteq \overline{f(U)} = \overline{\psi(D_r^k)} \subseteq \psi(\overline{D}_r^k) \subseteq \psi(D_r) \subseteq A_0.$$

Dette viser $\overline{U} \subseteq A_0$. Vi minder om, at dette betyder, at \overline{U} også er afslutningen til U med den sædvanlige metrik på \mathbb{C} .

Antag $f'(z) \neq 0$ for alle $z \in \partial U$. Vi vil vise, at vi kan udvide ψ_ε til en større kugle $D_{r'}$, hvor $r' > r$, i modstrid med valget af r .

Lad $w_0 \in \partial D_r$, og lad $\{w_n\}$ være en følge i D_r , der konvergerer mod w_0 . Definer følgen $\{z_n\}$ i \overline{U} ved $z_n = \psi(w_n)$. Da \overline{U} er kompakt i $\widehat{\mathbb{C}}$, findes en konvergent delfølge $\{z_{n_j}\}$, der konvergerer mod $z_0 \in \overline{U}$. Som i forrige påstand må $z_0 \in \partial U$, da ellers

$$w_0 = \lim_{j \rightarrow \infty} w_{n_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \psi^{-1}(z_{n_j}) = \psi^{-1}(z_0),$$

og dermed $w_0 \in \psi^{-1}(U) = D_r$.

Nu giver antagelsen $f'(z_0) \neq 0$, at der findes en holomorft invers g_{z_0} til f i en omegn V om $f(z_0)$. Da $r < 1$ er $w_0^k \in D_r$, og der gælder

$$\psi(w_0^k) = \lim_{j \rightarrow \infty} \psi(w_{n_j}^k) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(\psi(w_{n_j})) = \lim_{j \rightarrow \infty} f(z_{n_j}) = f(z_0).$$

Dermed kan vi vælge en åben omegn W om w_0 , så $w^k \in D_r$ og $\psi(w^k) \in V$ for $w \in W$.

Definer nu

$$\psi_{w_0}(w) = g_{z_0}(\psi(w^k))$$

for $w \in W$. For $w \in W \cap D_r$ er

$$\psi_{w_0}(w) = g_{z_0}(\psi(w^k)) = g_{z_0}(f(\psi(w))) = \psi(w),$$

og vi kan derfor stykke ψ og ψ_{w_0} sammen til en holomorft funktion.

Vi kan overdække ∂D_r med sådanne lokale udvidelser. Af kompakheden har vi, at den kan udtynnes til en endelig overdækning. Det følger nu at ψ kan udvides holomorft til $D_{r'}$ for et $r' > r$. \square

Bevis for sætning 5.4. Eksistensen følger af ovenstående påstande. Entydigheden følger af Böttchers sætning og identitetssætningen. \square

Både sætning 5.2 om lokal konjugering og sætning 5.4 om global konjugering vil vi i det følgende referere til som Böttchers sætning.

6 Kvadratiske polynomier

Vi betragter nu familien af polynomier P_c på formen

$$P_c(z) = z^2 + c$$

parametriseret ved $c \in \mathbb{C}$. Vi vil fremover bruge den forkortede notation $K_c = K_{P_c}$, $I_c = I_{P_c}$ og $J_c = J_{P_c}$.

6.1 Affin konjugering

Ved en affin konjugering kan et generelt kvadratisk polynomium

$$P(z) = Az^2 + Bz + C,$$

$A \neq 0$, skrives på formen $z^2 + c$. Hermed mener vi, at der findes en funktion $h(z) = az + b$, så $hPh^{-1} = P_c$ for et passende $c \in \mathbb{C}$. Af

$$(h^{-1}P_ch)(z) = az^2 + 2bz + \frac{b^2 - b + c}{a}$$

er det klart, at vi kan vælge a , b og c så den ønskede ligning er opfyldt. Til brug for de efterfølgende afsnit vises nedenstående lemma.

Lemma 6.1. *Punktet $z \in \mathbb{C}$ er periodisk med periode k for P hvis og kun hvis $h(z)$ er periodisk med periode k for P_c . I bekræftende fald har de to punkter identiske multiplikatorer.*

Bevis. Vi ser, at hvis $P(z) = w$ er $P_c(h(z)) = h(P(z)) = h(w)$ og videre hvis $P^n(z) = w$ er $P_c^n(h(z)) = h(w)$. Dette viser den første påstand. Ved kædereglens ses

$$(P_c^k)'(h(z)) = h'(P^k(z))(P^k)'(z)(h^{-1})'(h(z)) = (P^k)'(z),$$

hvormed anden påstand er vist. □

6.2 Parameterplanen

Som med den dynamiske plan for et fastholdt polynomium, deler vi parameterplanen op i to dele, nemlig Mandelbrot-mængden

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} \mid P_c^n(0) \not\rightarrow \infty\}$$

og dens komplement $\mathbb{C} \setminus \mathcal{M}$.

Af sætning 4.11 ses at \mathcal{M} også kan defineres som de $c \in \mathbb{C}$, så K_c er sammenhængende.

Sætning 6.2. *Mandelbrot-mængden opfylder følgende:*

(a) \mathcal{M} er kompakt og indeholdt i $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\}$.

(b) $\mathcal{M} \cap \mathbb{R} = [-2, 1/4]$.

Bevis. (a) Vi viser ved induktion at $|P_c^n(0)| \geq |c|(|c| - 1)^{2^{n-2}}$ for $n \geq 2$ og $|c| > 2$. Påstanden er klar for $n = 2$, da

$$|P_c^2(0)| = |c^2 + c| \geq |c^2| - |c| = |c|(|c| - 1).$$

Antag derfor at sætningen er vist for $n \geq 2$. Da fås

$$\begin{aligned} |P_c^{n+1}(0)| &\geq |P_c^n(0)|^2 - |c| \\ &= |c|^2(|c| - 1)^{2^{n-1}} - |c| \\ &\geq |c|^2(|c| - 1)^{2^{n-1}} - |c|(|c| - 1)^{2^n} \\ &= |c|(|c| - 1)^{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Det er nu klart, at $P_c^n(0) \rightarrow \infty$. Altså gælder $\mathcal{M} \subseteq \{c \in \mathbb{C} \mid |c| \leq 2\}$.

Hvis endvidere $|c| \leq 2$, men $|P_c^n(0)| > 2$ for et n , ses ved brug af ovenstående, at $P_c^n(0) \notin \mathcal{M}$ og dermed $c \notin \mathcal{M}$. Dette viser at

$$\mathcal{M} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{c \in \mathbb{C} \mid |c| \leq 2, |P_c^n(0)| \leq 2\}, \quad (6.6)$$

som klart er afsluttet og begrænset.

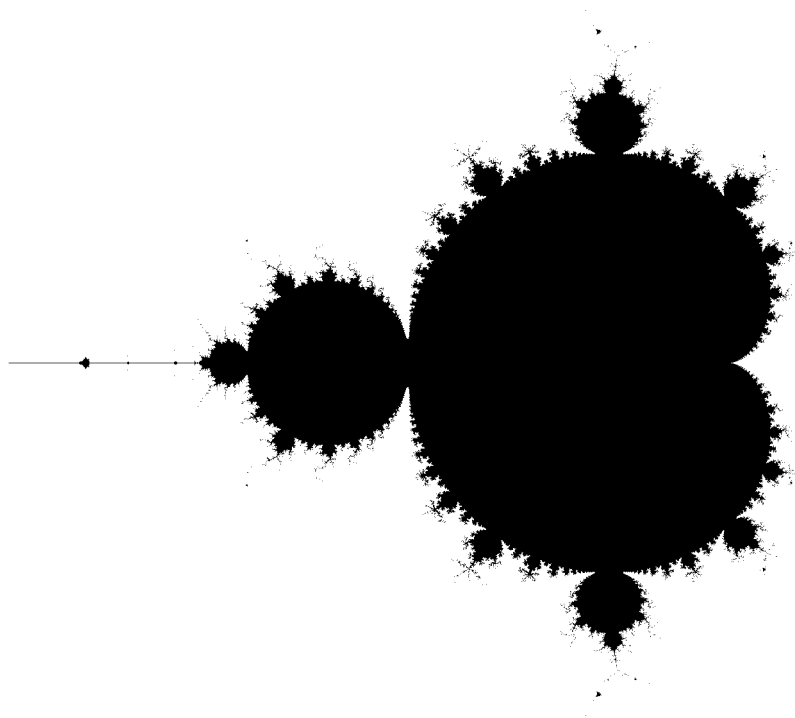
(b) Antag $c \in \mathbb{R}$. Det er allerede vist at $|c| \leq 2$, når $c \in \mathcal{M}$. Antag først at $c > 1/4$. Antag nu at der findes et endeligt x , så $P_c^n(0) \rightarrow x$. Af kontinuiteten af P_c fås

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} P_c^n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_c(P_c^n(0)) = P_c(\lim_{n \rightarrow \infty} P_c^n(0)) = P_c(x).$$

Men $P_c(x) = x$ har ingen reelle løsninger for $c > 1/4$. Det er klart at $\{P_c^n(0)\}$ er en voksende følge. Altså må $P_c^n(0) \rightarrow \infty$, så $c \notin \mathcal{M}$.

Lad nu $-2 \leq c \leq 1/4$. Da har $P_c(x) = x$ reelle løsninger, og vi kan lade $a = (1 + \sqrt{1 - 4c})/2$ være den største løsning. Man kan let overbevise sig om, at $|P_c(0)| = |c| \leq a$. Antag induktivt $|P_c^n(0)| \leq a$. Da er $P_c^n(0)^2 \leq a^2 = a - c$ og dermed $P_c^{n+1}(0) = P_c^n(0)^2 + c \leq a$. Af $|c| \leq a$ og $0 \leq P_c^n(0)^2$ får vi desuden $-a \leq c \leq P_c^n(0)^2 + c = P_c^{n+1}(0)$. Vi slutter $|P_c^{n+1}(0)| \leq a$. Således er banen for 0 begrænset og derfor er $c \in \mathcal{M}$. \square

Ovenstående anviser en måde at lave en computertegning af \mathcal{M} på. Sætningen giver at vi kan nøjes med at undersøge punkter i den afsluttede kugle \overline{D}_2 . Vi lader parameteren c løbe over et antal gitterpunkter i \overline{D}_2 , og beregner et på forhånd defineret antal punkter af banen for 0 under P_c . Hvis et af de beregnede punkter i banen giver en værdi udenfor \overline{D}_2 , ved vi at $c \notin \mathcal{M}$, og vi farver punktet svarende til c hvidt. I modsat fald farver vi det sort. Resultatet af disse beregninger er vist på figur 3. Koden kan ses i bilag A.1.



Figur 3: Mandelbrot-mængden.

6.3 Hyperbolske komponenter

Definition 6.3. Med $H(\mathcal{M})$ betegnes mængden af parameterverdier $c \in \mathbb{C}$ for hvilke det tilhørende polynomium P_c har en tiltrækkende cykel.

Korollar 4.7 giver, at der til hvert $c \in H(\mathcal{M})$ findes en entydig bestemt tiltrækkende cykel, samt at det kritiske punkt $z = 0$ tiltrækkes af den, hvorfor $P_c^n(0) \rightarrow \infty$. Således har vi $H(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M}$.

Sætning 6.4. $H(\mathcal{M})$ er åben og perioden af den tiltrækkende cykel er konstant på hver af de sammenhængende komponenter.

Bevis. Antag $c_0 \in H(\mathcal{M})$ og lad z_0 frembringe den tiltrækkende cykel, der antages at have periode k . Lad $F(z, c) = P_c^k(z) - z$. Da $F(z_0, c_0) = 0$ og $\frac{\partial F}{\partial z}(z_0, c_0) = \rho - 1 \neq 0$, giver implicitfunktionssætningen en kontinuert funktion $c \mapsto z(c)$ med egenskaben $F(z(c), c) = 0$ defineret på en omegn $D_r(c_0)$ om c_0 .

Sæt $F_i(c) = P_c^i(z(c)) - z(c)$ for $i = 1, \dots, k-1$ og $\rho(c) = (P_c^k)'(z(c))$. Da $F_i(c_0) \neq 0$ og $|\rho(c_0)| < 1$ kan vi af kontinuiteten af $c \mapsto z(c)$ antage r valgt, så $F_i(c) \neq 0$ og $|\rho(c)| < 1$ for alle i . Dette viser, at $D_r(c_0) \subseteq H(\mathcal{M})$, samt at perioden af den tiltrækkende cykel er konstant på $D_r(c_0)$.

Lad nu $G \subseteq H(\mathcal{M})$ være sammenhængende og lad $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ være en kurve, der forbinder to punkter i G . Vælg nu ved første del af beviset for hver $\gamma(t)$ kugler $D_{r_t}(\gamma(t))$. Herved fås en åben overdækning af den kompakte mængde $\gamma([0, 1])$ og kan derfor udtyndes til en endelig overdækning $D_{r_{t_1}}(\gamma(t_1)) \cup \dots \cup D_{r_{t_n}}(\gamma(t_n))$. Det er nu klart, at perioden af den tiltrækkende cykel er konstant over hele kurven. \square

Vi vil nu vise, hvordan vi kan finde et præcist udtryk for to af komponenterne i $H(\mathcal{M})$. Lad

$$W_0 = \{c \in \mathbb{C} \mid P_c \text{ har et tiltrækkende fikspunkt}\},$$

$$W_{1/2} = \{c \in \mathbb{C} \mid P_c \text{ har en tiltrækkende cykel af periode 2}\}.$$

Det viser sig, at W_0 er lettere at beskrive, hvis vi i stedet for P_c betragter polynomiet $Q_\lambda : z \mapsto \lambda z + z^2$. Ifølge udregningen i afsnit 6.1 er Q_λ affint konjugeret med P_c for $c = \lambda/2 - (\lambda/2)^2$, og det er klart, at der til hvert c findes λ , så konjugeringen gælder, nemlig rødderne $\lambda = 1 \pm \sqrt{1 - 4c}$. Lemma 6.1 giver så, at P_c har et tiltrækkende fikspunkt hvis og kun hvis Q_λ har det. Fikspunkterne for Q_λ er 0 og $1 - \lambda$ med multiplikatorer $Q'_\lambda(0) = \lambda$ og $Q'_\lambda(1 - \lambda) = 2 - \lambda$. Betingelsen for et tiltrækkende fikspunkt er altså $\lambda \in D_1(0) \cup D_1(2)$.

Svarende til tilfældet $\lambda \in D_1(0)$, får vi, at P_c har et tiltrækkende fikspunkt, hvis

$$c \in \{\lambda/2 - (\lambda/2)^2 \mid |\lambda| < 1\}.$$

Hvis derimod $\lambda \in D_1(2)$, kan vi vælge et $|\eta| < 1$, så $\lambda = 2 - \eta$, og da $(2 - \eta)/2 - (2 - \eta)^2/4 = \eta/2 - (\eta/2)^2$ får vi netop den samme mængde som ovenfor. Der findes altså netop en hyperbolsk komponent med periode 1. W_0 er området til højre på figur 4 og det hvide område i computertegningen angivet på figur 5.

Dobbeltheden i muligheden for valg af λ skyldes de to løsninger til ligningen $c = \lambda/2 - (\lambda/2)^2$. Vælger vi den ene, ser vi ved indsættelse, at

$$\rho_{W_0} : c \mapsto 1 - \sqrt{1 - 4c},$$

hvor rodtegnet angiver den principale rod defineret på $\mathbb{C}_\pi = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, er en bijektiv holomorf afbildning af W_0 på D_1 . Fikspunktet $(1 - \sqrt{1 - 4c})/2$ har multiplikatoren $P'_c((1 - \sqrt{1 - 4c})/2) = 1 - \sqrt{1 - 4c}$, som altså netop er givet ved $\rho_{W_0}(c)$, og derfor er tiltrækkende på hele W_0 .

Cyklerne af periode 2 for P_c findes som løsninger til ligningen

$$(z^2 + c)^2 + c = z.$$

Det er dog klart, at også fikspunkterne

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2}$$

vil være løsninger til ovenstående ligning, så ved at dividere med polynomiet

$$\left(z - \frac{1 + \sqrt{1 - 4c}}{2}\right)\left(z - \frac{1 - \sqrt{1 - 4c}}{2}\right) = z^2 - z + c,$$

kan vi eliminere fikspunkterne. Polynomiumsdivisionen giver polynomiet $z^2 + z + c + 1$, der har rødderne

$$\frac{-1 \pm \sqrt{-3 - 4c}}{2},$$

som dermed udgør cyklens to punkter. Cyklen har multiplikatoren

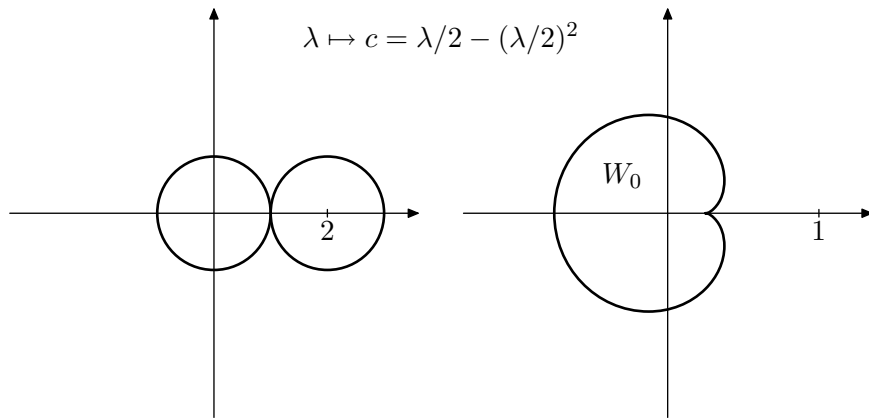
$$(-1 + \sqrt{-3 - 4c})(-1 - \sqrt{-3 - 4c}) = 4(1 + c).$$

Det er nu klart, at cyklen er tiltrækkende netop, når $c \in D_{1/4}(-1)$, som altså udgør området $W_{1/2}$. På figur 5 er det den store cirkel umiddelbart til venstre for det hvide område. Vi ser, at

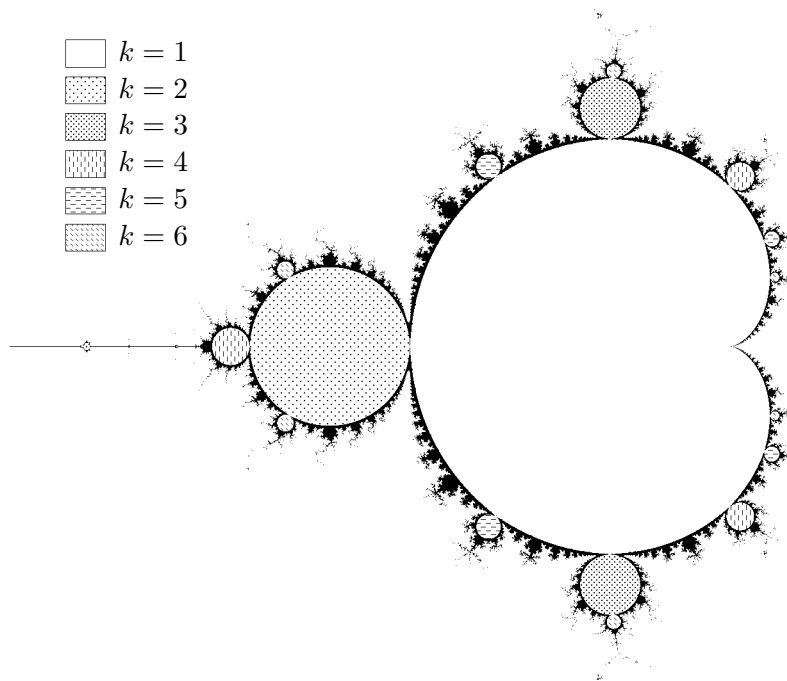
$$\rho_{W_{1/2}} : c \mapsto 4(1 + c)$$

er en bijektiv holomorf afbildning af $W_{1/2}$ på D_1 . Igen ser vi, at den angiver multiplikatoren af den tiltrækkende cykel hørende til $c \in W_{1/2}$.

Ovenstående er eksempler på et generelt resultat nævnt i [1]. Vi gengiver det her:



Figur 4: Den hyperbolske komponent W_0 .



Figur 5: Hyperbolske komponenter med tiltrækkende cykler af perioder k .

Sætning 6.5. *For hver hyperbolsk komponent W inducerer multiplikatoren af den tiltrækkende cykel en bijektiv holomorf afbildning $\rho_W : W \rightarrow D_1$.*

Generelt kan ovenstående metode ikke bruges til at beregne komponenterne hørende til cykler af større perioder.

I stedet har vi lavet et computerprogram, der kan beregne de forskellige komponenter i $H(\mathcal{M})$. Ideen er følgende: Antag for $c \in H(\mathcal{M})$ at polynomiet P_c har en tiltrækkende cykel af periode k . Ifølge sætning 4.6 må det kritiske punkt 0 tiltrækkes af cyklen. Vi itererer nu $z_0 = 0$ et vist antal gange N og får de første $N + 1$ punkter af banen z_0, z_1, \dots, z_N . Disse punkter må for et tilstrækkelig stort valg af N nærme sig cyklen. Vi kan altså ved at undersøge disse punkter få et billede af, om 0 konvergerer mod cyklen.

Konkret lader vi c løbe over alle gitterpunkter i $D_2(0)$ med en på forhånd valgt gittertæthed. Da vi er begrænset til at kigge på et endeligt antal bane-punkter, fastsætter vi en tolerance $\tau > 0$. Vi benytter nu følgende algoritme til at fastslå en mulig cykelperiode: Hvis $|z_N - z_{N-1}| < \tau$, slutter vi, at perioden er 1, og vi tildeler punktet c en farve svarende denne periode. I modsat fald undersøger vi om $|z_N - z_{N-2}| < \tau$ og fastsætter i bekræftende fald perioden til 2 med en tilhørende farve til c . Sådan forsættes indtil vi på et tidspunkt giver op. Hvis vi undervejs i beregningen møder en værdi $|z_i| > 2$, så ved vi, at $c \notin \mathcal{M}$, og vi tildeler punktet farven hvid. I alle andre tilfælde tildeles c farven sort.

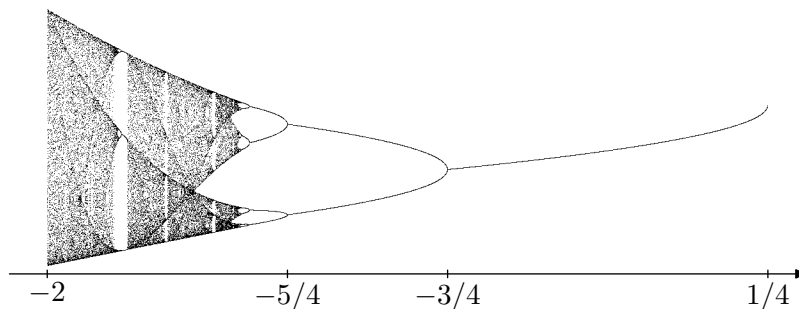
Resultatet af beregningerne er vist på figur 5. De omtalte cykelperiodefarver er erstattet med forskellige mønstre for at øge læsbarheden på udskriften. Koden er gengivet i bilag A.2.

6.4 Bifurkationer

Af udregningerne i afsnit 6.3 får vi, at $\overline{W}_0 \cap \overline{W}_{1/2} = \{-3/4\}$. Altså foregår der en fordobning af perioden for den tiltrækkende cykel, når c går fra W_0 langs den reelle akse gennem punktet $-3/4$ og videre ind i $W_{1/2}$. Desuden ses af multiplikatoren $\rho_{W_0}(c) = 1 - \sqrt{1 - 4c}$, at det tiltrækkende fikspunkt i W_0 går fra at være tiltrækkende, til at være neutralt for $c = -3/4$, og derefter til at være frastødende for $c < -3/4$. Tilsvarende går den tiltrækkende cykel af periode 2 i $W_{1/2}$ med multiplikator $\rho_{W_{1/2}}(c) = 4(1 - c)$ fra at være frastødende for $c > -3/4$ til at være tiltrækkende for $-5/4 < c < -3/4$. Vi kalder $-3/4$ et periodefordoblende bifurkationspunkt.

Hvis vi fortsætter ud af den reelle akse, vil vi i punktet $-5/4$ igen finde et bifurkationspunkt. Vi kan se af figur 5, at $-5/4$ er et periodefordoblende bifurkationspunkt, idet perioden af den tiltrækkende cykel går fra at have en periode på 2 til en periode på 4.

Vi vil ikke gå videre med en matematisk beskrivelse og analyse af bifurkationer. I stedet findes en måde gennem en computerberegning at undersøge periodeskift langs den reelle akse.



Figur 6: Feigenbaums bifurkationstræ.

I lighed med computerprogrammet beskrevet i afsnit 6.3, itererer vi det kritiske punkt 0 under P_c for c løbende i $[-2, 1/4]$. Hvis 0 tiltrækkes af en cykel, vil banens værdier efterhånden stå og skifte mellem et antal værdier svarende til cyklens periode. Visuelt fremstiller vi dette ved at afbilde de sidste punkter z_n af den beregnede banes punkter som koordinater (c, z_n) . Vi bemærker at banen forbliver reel, da både det kritiske punkt og c er reel.

Ved denne metode fremkommer Feigenbaums bifurkationstræ, som kan ses på figur 6. Vi bemærker specielt, hvordan bifurkationspunkterne optræder i denne fremstilling (sammenlign med figur 5). Desuden bemærker vi, at ikke alle værdier af c giver anledning til en tiltrækkende cykel. Sådanne værdier fremtræder som en slags støj på figuren. Koden kan ses i bilag A.3.

6.5 Anvendelse af Böttchers sætning på polynomier

Vi vil nu vise, hvordan Böttchers sætning kan bruges til at undersøge dynamikken af et generelt P_c , $c \in \mathcal{M}$, på mængden I_c af punkter, der konvergerer mod ∞ . Böttchers sætning udtaler sig om området omkring 0 , så vi konjugerer P_c med $z \mapsto z^{-1}$. Herved får vi følgende korollar til Böttchers sætning:

Korollar 6.6. *Antag $c \in \mathcal{M}$. Da findes for polynomiet P_c en bijektiv holomorf funktion $\phi_c : I_c \rightarrow I_0$, der opfylder*

$$\phi_c(P_c(z)) = \phi_c(z)^2,$$

for alle $z \in I_c$.

Bevis. Tilfældet $c = 0$ er trivielt. Antag derfor at $c \neq 0$. Vi betragter den rationale funktion $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ defineret ved

$$f(z) = P_c(z^{-1})^{-1} = \frac{1}{z^{-2} + c} = \frac{z^2}{1 + cz^2}.$$

For $|z| < |c|^{-1/2}$ er f en endelig holomorf funktion og ved direkte udregning ser vi, at f har potensrækken

$$f(z) = z^2 - cz^4 + c^2z^6 - \dots$$

i en omegn om 0.

Vi lader $A_0 = \{z \in \widehat{\mathbb{C}} \mid f^n(z) \rightarrow 0\}$. Vi vil vise $\infty \notin A_0$. Hvis $f^n(\infty) = \infty$ for et $n \geq 1$, er iterationen af ∞ under f periodisk, og det er klart, at $f^n(\infty) \neq 0$. Vi kan altså antage $f^n(\infty) \neq \infty$ for alle $n \geq 1$. Vi ser at f har en hævelig singularitet i ∞ , og at $f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 0} P_c(z)^{-1} = P_c(0)^{-1} = c^{-1}$. Dermed er

$$f^n(\infty) = f^{n-1}(f(\infty)) = P_c^{n-1}(P_c(0))^{-1} = P_c^n(0)^{-1},$$

så $c \in \mathcal{M}$ giver i dette tilfælde at $f^n(\infty) \neq 0$.

Nu må $A_0 = \{0\} \cup \{z^{-1} \mid z \in I_c\}$. Vi har tidligere vist, at vi kan vælge et $R > 0$, så $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\} \subseteq I_c$, og sammen med at I_c er sammenhængende, viser det, at A_0 er sammehængende i $\widehat{\mathbb{C}}$.

På A_0 er f som nævnt i forbindelse med Böttchers sætning en endelig holomorfe funktion, og $f'(z) = 2z/(1 + cz^2)^2 \neq 0$ for alle $z \in A_0 \setminus \{0\}$. Sætning 5.4 giver derfor en bijektiv holomorfe funktion $\phi : A_0 \rightarrow D_1$ med egenskaben $\phi(f(z)) = \phi(z)^2$ for $z \in A_0$. Lad nu $\phi_c(z) = \phi(z^{-1})^{-1}$ for $z \in I_c$. Da gælder

$$\phi_c(P_c(z)) = \phi(P_c(z)^{-1})^{-1} = \phi(f(z^{-1}))^{-1} = \phi(z^{-1})^{-2} = \phi_c(z)^2,$$

og vi har en bijektiv holomorfe afbildning af I_c på $I_0 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$. \square

Sætningen giver at polynomierne P_c , $c \in \mathcal{M}$, alle er konjugerede til det simpleste kvadratiske polynomium $P_0 : z \mapsto z^2$ på området $I_c = \mathbb{C}K_c$. Mere præcist udtrykt er $P_c = \phi_c P_0 \phi_c^{-1}$, hvilket kan illustreres med følgende kommuterende diagram:

$$\begin{array}{ccc} I_c & \xrightarrow{P_c} & I_c \\ \phi_c \downarrow & & \uparrow \phi_c^{-1} \\ I_0 & \xrightarrow{P_0} & I_0 \end{array}$$

Som beskrevet i forbindelse med introduktionen til Böttchers sætning, er dynamikken på I_c bortset fra konjugeringen ϕ_c simpel potensopløftning, idet vi konkret har $P_c^n = \phi_c P_0^n \phi_c^{-1}$.

Vores bevis for Böttchers sætning i den lokale version er konstruktivt i den forstand, at vi har givet en foreskrift for Böttcher-funktionen ϕ som et uendeligt produkt. Med notationen fra beviset er $h(z) = 1/(z + cz^2)$ og dermed

$$1 + h(f^n(z^{-1})) = \frac{1}{1 + cf^n(z^{-1})^2} = \frac{1}{1 + cP_c^n(z)^{-2}}.$$

Lemma 3.4 giver derfor

$$\phi_c(z) = z \prod_{n=1}^{\infty} h_n(z^{-1})^{-1} = z \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{c}{P_c^{n-1}(z)^2} \right]^{1/2^n}$$

for $|z| > r^{-1}$. Vi kan ikke umiddelbart udvide dette produkt til at gælde på hele I_c , da vi igennem Böttchers sætning netop bruger, at z er stor til at sikre os, at rodfunktionen kan defineres holomorft på snitmængden \mathbb{C}_π .⁵ Vi kan imidlertid bruge den til at udtale os om $|\phi_c|$, som vi vil vise i det følgende.

Da $\phi_c(I_c) = I_0 \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ er nedenstående definition meningsfuld.

Definition 6.7. For $c \in \mathcal{M}$ kalder vi $G_c : z \mapsto \log |\phi_c(z)|$ *potentialfunktionen*. Vi kalder

$$\Gamma_c(r) = \{z \in I_c \mid G_c(z) = \log r\},$$

$r > 1$, et *ækvipotentiale*.

Sætning 6.8. Lad $c \in \mathcal{M}$. Da er G_c kontinuert, og der gælder for alle $z \in I_c$:

- (a) $G_c(z) > 0$,
- (b) $G_c(P_c(z)) = 2G_c(z)$,
- (c) $G_c(z) \rightarrow 0$ for $d(z, K_c) \rightarrow 0$,
- (d) $G_c(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \log |P_c^n(z)|$.

Bevis. Da ϕ_c er holomorf, er det klart, at G_c er kontinuert. Ligeledes følger (a) og (b) af korollar 6.6.

(c) Vælg som i beviset for sætning 4.10 et R så $V = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$ har egenskaberne $P_c(V) \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq I_c$ og $I_c = \bigcup_{n=1}^{\infty} (P_c^n)^{-1}(V)$. Vi bemærker, at $\bar{V} \setminus P_c(V)$ er en ikke-tom, afsluttet og begrænset mængde. Derfor er $A = \sup_{z \in \bar{V} \setminus P_c(V)} G_c(z) < \infty$.

Lad $N \geq 1$. Hvis $z \in J_c$, kan vi vælge en åben omegn W_z om z , så

$$W_z \cap (P_c^N)^{-1}(V) = \emptyset.$$

I modsat fald vil nemlig $z \in \overline{(P_c^N)^{-1}(V)}$, og vi vil kunne vælge en følge $\{z_n\}$ i $(P_c^N)^{-1}(V)$, der konvergerer mod z . Dette giver $P_c^N(z_n) \rightarrow P_c^N(z)$, hvorfor $P_c^N(z) \in \bar{V} \subseteq I_c$, i modstrid med $z \in J_c \subseteq K_c$. Følgelig er

$$W = K_c \cup \bigcup_{z \in J_c} W_z$$

en åben mængde, der indeholder K_c , og der gælder $W \cap (P_c^N)^{-1}(V) = \emptyset$.

Lad nu $z \in W \cap I_c$. Der findes $n > N$, så $P_c^n(z) \in V$ og $P_c^{n-1}(z) \notin V$. Hvis w er en løsning til $P_c(w) = P_c^n(z)$, må $|w| = |P_c^{n-1}(z)| \leq R$, og derfor

⁵Når z er tilstrækkelig stor er nemlig $|P_c^{n-1}(z)|^2 > |c|$ for alle $n \geq 1$ (jf. valget af V i beviset for sætning 4.10).

$w \notin V$. Vi har således vist $P_c^n(z) \in \bar{V} \setminus P_c(V)$. Ved (a) og (b) slutter vi derfor

$$0 < G_c(z) = 2^{-n} G_c(P_c^n(z)) < 2^{-N} A.$$

Ved at lade $N \rightarrow \infty$ følger påstanden.

(d) Hvis $c \in \mathcal{M}$, må $0 \notin I_c$, og derfor er $P_c^n(z) \neq 0$ for $z \in I_c$ og $n \geq 0$. Definer nu ϕ_n , $n \geq 1$, ved for $z \in I_c$ at sætte

$$\phi_n(z) = |1 + c/P_c^{n-1}(z)^2|^{1/2^n}.$$

Vi vil vise, at $\prod_{n=1}^{\infty} \phi_n$ konvergerer lokalt uniformt. Lad derfor $A \subseteq I_c$ være kompakt, og vælg N så $|c/P_c^{n-1}(z)^2| \leq 1/2$ for alle $n \geq N$ og $z \in A$. Vi får således vurderingen $-\log 2 \leq \log |1 + c/P_c^{n-1}(z)^2| < \log 2$, og dermed $|\log \phi_n(z)| \leq \log 2/2^n$.

Det følger nu af majorantkriteriet, at $\sum_{n=1}^{\infty} \log \phi_n$ konvergerer lokalt uniformt mod en kontinuert sumfunktion S . Af sætning 3.5 får vi derfor, at $\tilde{g}(z) = |z| \prod_{n=1}^{\infty} \phi_n(z)$ konvergerer og at $\tilde{g}(z) = |z| \exp S(z)$, hvorfor specielt $\tilde{g}(z) \neq 0$ for alle $z \in I_c$.

Da nu

$$|z| \prod_{n=1}^N \left| 1 + \frac{c}{P_c^{n-1}(z)^2} \right|^{1/2^n} = |z| \prod_{n=1}^N \left| \frac{P_c^n(z)}{P_c^{n-1}(z)^2} \right|^{1/2^n} = |P_c^N(z)|^{1/2^N},$$

må $\tilde{g}(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} |P_c^N(z)|^{1/2^N}$, og specielt $\tilde{g}(z) > 1$, da $P_c^N(z) \rightarrow \infty$.

For at vise $\tilde{g} = |\phi_c|$, konjugerer vi tilbage fra I_c til A_0 ved at betragte $g : z \mapsto \tilde{g}(z^{-1})^{-1}$. Idet vi fortsætter med at bruge notationen fra Böttchers sætning og korollar 6.6, har vi, at g og $|\phi|$ pr. konstruktion må stemme overens på $D_r \setminus \{0\}$, og sætter vi $g(0) = 0$, får vi to kontinuerte udvidelser af $|\phi|_{D_r}$ til A_0 . Da derfor

$$\tilde{g}(P_c(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|P_c^n(P_c(z))|^{1/2^n}}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{|P_c^{n+1}(z)|^{1/2^{n+1}}}{2^{n+1}} \right]^2 = \tilde{g}(z)^2$$

for $z \in I_c$ og dermed også $g(f(z)) = g(z)^2$ for $z \in A_0$, følger $g = |\phi|$ på hele A_0 af entydigheden i lemma 5.3. Dermed må $|\phi_c| = \tilde{g}$ på I_c .

Endelig er $G_c(z) = \log \tilde{g}(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \log |P_c^n(z)|$. □

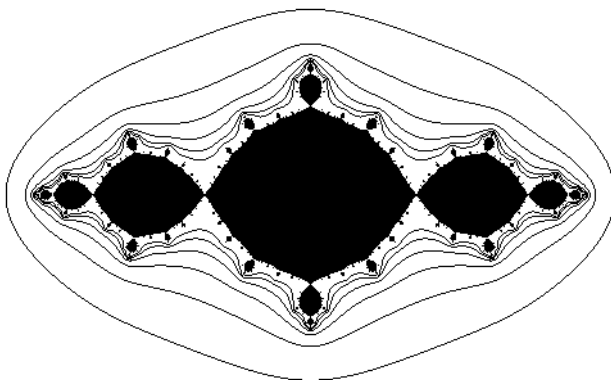
Sætningen giver at hvert ækvipotentiale føres over i et nyt ækvipotentiale under anvendelse af P_c , idet nemlig $P_c(\Gamma_c(r)) = \Gamma_c(r^2)$ for $r > 1$.

Endvidere giver sætningen, at G_c kan udvides kontinuert til K_c ved at sætte $G_c = 0$ på K_c . Banen for alle $z \in K_c$ er begrænset, så formlen

$$G_c(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \log |P_c^n(z)|$$

gælder på hele \mathbb{C} . Af denne formel ses endvidere, at G_c måler hastigheden vægtet mod 2^{-n} hvormed banen for hvert $z \in \mathbb{C}$ konvergerer mod ∞ (i overensstemmelse med $G_c = 0$ på K_c).

Formlen giver en let måde at lave en computerberegning af ækvipotentialer på. Vi har på figur 7 optegnet nogle udvalgte ækvipotentialer for P_{-1} . De er valgt, så hvert ækvipotential føres over i det nærmeste større ækvipotential under anvendelse af P_{-1} . Metoden, vi har brugt, er, at optegne alle punkter $z \in I_c$, der giver værdier af $G_c(z)$, der, indenfor en fastsat tolerance, ligger nær den ønskede potentialværdi. For at give ækvipotentiallinien en jævn tykkelse, har vi fjernet nogle af de herved markede punkter, der passer dårligst til den ønskede værdi. Koden kan ses i bilag A.4.



Figur 7: Ækvipotentialer for P_{-1} .

Vi slutter vores undersøgelser af kvadratiske polynomier ved at vise, hvordan Böttchers sætning kan bruges til at bevise et specialtilfælde af sætning 4.11.

Sætning 6.9. *Hvis $c \in \mathcal{M}$ er J_c og K_c begge sammenhængende.*

Bevis. Lad $\psi = \phi_c^{-1}$ og lad $A_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 1 + \varepsilon\}$ for $\varepsilon > 0$. Vi vil vise, at

$$J_c = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\psi(A_\varepsilon)}.$$

Lad først $z \in J_c$ og $\varepsilon > 0$. Vælg en følge $\{z_n\}$ i I_c , der konvergerer mod z . Sætning 6.8 giver $G_c(z_n) \rightarrow G_c(z) = 0$ og således $|\phi_c(z_n)| \rightarrow 1$. Da må fra et vist trin $z_n \in \phi_c^{-1}(A_\varepsilon) = \psi(A_\varepsilon)$, hvorfor $z \in \overline{\psi(A_\varepsilon)}$.

Antag $\bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\psi(A_\varepsilon)} \setminus J_c \neq \emptyset$, og lad $z \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\psi(A_\varepsilon)} \setminus J_c \subseteq I_c$. Sæt $\varepsilon = (|\phi_c(z)| - 1)/2$. Da $z \in \overline{\psi(A_\varepsilon)}$ kan vi vælge en følge $\{z_n\}$ i $\psi(A_\varepsilon) \subseteq I_c$, der konvergerer mod z . Dermed er $|\phi_c(z_n)| < 1 + \varepsilon$, og derfor $|\phi_c(z)| \leq 1 + \varepsilon$. Valget af ε giver $|\phi_c(z)| - 1 \leq (|\phi_c(z)| - 1)/2$, hvilket er en modstrid.

Nu er $\psi(A_\varepsilon)$ og dermed $\overline{\psi(A_\varepsilon)}$ sammenhængende. Derfor er J_c sammenhængende.

Lad endelig $z_1, z_2 \in K_c$ og lad $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ være en kurve, der forbinder de to punkter. Hvis $\gamma([0, 1]) \subseteq K_c$ er punkterne forbundet med en kurve i K_c . Lad i modsat fald $A = \{t \in [0, 1] \mid \gamma(t) \notin K_c\}$, og sæt $\alpha = \inf A$ og $\beta = \sup A$. Vi ser $\gamma([0, \alpha]) \cup \gamma([\beta, 1]) \subseteq K_c$ og $\gamma(\alpha), \gamma(\beta) \in J_c$. Da J_c er sammenhængende, følger det nu, at z_1 og z_2 kan forbindes med en kurve i K_c . Vi slutter derfor, at K_c er sammenhængende. \square

7 Litteratur

- [1] Bodil Branner: *The Mandelbrot set*, Proceedings of Symposia in Applied Mathematics **39**, 1989, American Mathematical Society
- [2] John Milnor: *Dynamics in One Complex Variable*, Vieweg, 2000
- [3] Alan F. Beardon: *Iteration of Rational Functions*, Springer-Verlag, 1991
- [4] S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi, T. Ueda: *Holomorphic Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000
- [5] Lennart Carleson, Theodore W. Gamelin: *Complex Dynamics*, Springer-Verlag, 1993
- [6] Christian Berg: *Kompleks funktionsteori*, Universitetsbogladen, København, 2002
- [7] Stewart, Tall: *Complex Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983
- [8] Christian Berg: *Topologi*, HCØ Tryk, København, 1997
- [9] Walter Rudin: *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, Singapore, 1987

A Pascal-kode

I dette bilag gengiver vi Pascal-koden, vi har brugt til at lave vores computertegninger. Vi har udviklet et grafikbibliotek, der gør det muligt at arbejde med reelle koordinater, samt et bibliotek til regning med komplekse tal. De kan begge hentes fra <http://www.bakkeland.dk/bachelor/pas/>. For skrivning af PNG-filer kræves NetPBM-grafikpakken. Pascal-koden er oversat med Free Pascal på en Linux-computer.

A.1 mandelbrot.pas

```
{ $MODE DELPHI }

program Mandelbrot;

uses
  Image, Complex;

const
  DotSize      = 0.002;
  Iterations   = 40;
  FileName     = 'mandelbrot.png';

var
  Canvas : TCanvas;
  x, y   : TReal;
  c, z   : TComplex;
  n      : Integer;

begin
  Canvas := TCanvas.Create(-2, 0.46, -1.1, 1.1, DotSize, DotSize);
  y := -1.1;
  while (y <= 1.1) do
    begin
      x := -2;
      while (x <= 0.46) do
        begin
          c := CMake(x, y); { c := x+iy }
          z := CMake(0, 0); { z := 0 }
          n := 0;
          while (CAbs(z) <= 2) do { |z| <= 2 }
            begin
              if (n >= Iterations) then
                begin
                  Canvas[x, y] := Gray(0); { (x,y) farves sort }
                  Break;
                end;
              z := CAdd(CSqr(z), c); { z := z^2+c }
              Inc(n);
            end;
          x := x + DotSize;
        end;
      y := y + DotSize;
    end;
end;
```

```

    y:= y + DotSize;
  end;
  Canvas.ExportPNG(FileName);
  Canvas.Free;
end.

```

A.2 hyperkomp.pas

```

{$MODE DELPHI}

program HyperKomp;

uses
  Image, Complex;

const
  DotSize      = 0.002;
  Tol          = 0.002;
  Iterations1  = 40;
  Iterations2  = 1000;
  MaxPeriod    = 6;
  FileName     = 'hyperkomp.png';

var
  x, y        : TReal;
  c           : TComplex;
  z           : array[0..MaxPeriod] of TComplex;
  n, i       : Integer;
  Canvas     : TCanvas;

begin
  Canvas:= TCanvas.Create(-2, 0.46, -1.1, 1.1, DotSize, DotSize);
  y:= -1.1;
  while (y <= 1.1) do
    begin
      x:= -2;
      while (x <= 0.46) do
        begin
          c:= CMake(x, y); { c:= x+iy }
          z[0]:= CMake(0, 0); { z[0]:= 0 }
          n:= 0;
          while (CAbs(z[0]) <= 2) do
            begin
              if (n >= Iterations1) then
                begin
                  Canvas[x, y]:= Gray(0); { (x,y) farves sort }
                  if (n >= Iterations2) then
                    begin
                      for i:= 1 to MaxPeriod do
                        if (CAbs(CDiff(z[0], z[i])) < Tol) then
                          begin
                            Canvas[x, y]:= Gray(i);
                            Break;

```

```

        end;
        Break;
    end;
end;
for i:= MaxPeriod downto 1 do
    z[i]:= z[i-1];
    z[0]:= CAdd(CSqr(z[0]), c); { z[0]:= z[0]^2+c }
    Inc(n);
end;
x:= x + DotSize;
end;
y:= y + DotSize;
end;
{ Indsæt mønstre }
Canvas.FillPattern(Gray(1), BlankPattern);
Canvas.FillPattern(Gray(2), LowDensityDotsPattern);
Canvas.FillPattern(Gray(3), HighDensityDotsPattern);
Canvas.FillPattern(Gray(4), VerticalLinesPattern);
Canvas.FillPattern(Gray(5), HorizontalLinesPattern);
Canvas.FillPattern(Gray(6), TiltedLinesPattern);
Canvas.ExportPNG(FileName);
Canvas.Free;
end.

```

A.3 feigenbaum.pas

```

{$MODE DELPHI}

program Feigenbaum;

uses
    Image;

const
    Infinity    = 1E10;
    DotWidth    = 0.002;
    DotHeight   = 0.01;
    Iterations  = 5000;
    Dots        = 20;
    FileName    = 'feigenbaum.png';

var
    Canvas : TCanvas;
    c, x   : Real;
    n      : Integer;

begin
    Canvas:= TCanvas.Create(-2, 0.25, -2, 2, DotWidth, DotHeight);
    c:= -2;
    while (c <= 0.25) do
    begin
        x:= 0;
        n:= 0;

```

```

while (x < Infinity) do
begin
  if (n > Iterations - Dots) then
    Canvas[c, x]:= Gray(0);
  if (n >= Iterations) then
    Break;
  x:= Sqr(x) + c; { x:= x^2+c }
  Inc(n);
end;
c:= c + DotWidth/5;
end;
Canvas.ExportPNG(FileName);
Canvas.Free;
end.

```

A.4 potential.pas

```

{$MODE DELPHI}

program Potential;

uses
  Image, Complex;

const
  Infinity   = 1E10;
  DotSize    = 0.0075;
  Iterations = 50;
  FileName    = 'potential.png';

var
  Canvas      : TCanvas;
  FloatArea   : TFloatArea;
  c, z        : TComplex;
  x, y        : TReal;
  n           : Integer;

begin
  c:= CMake(-1, 0);
  Canvas:= TCanvas.Create(-1.8, 1.8, -1.1, 1.1, DotSize, DotSize);
  FloatArea:= TFloatArea.Create(Canvas);
  y:= -1.1;
  while (y <= 1.1) do
  begin
    x:= -1.8;
    while (x <= 1.8) do
    begin
      z:= CMake(x, y); { z:= x+iy }
      n:= 0;
      while (CAbs(z) < Infinity) do
      begin
        if (n >= Iterations) then
          begin

```

```

        Canvas[x, y]:= Gray(0); { (x,y) farves sort }
        Break;
    end;
    z:= CAdd(CSqr(z), c);
    Inc(n);
end;
if (n < Iterations) then
    FloatArea[x, y]:= Ln(CAbs(z))/Exp(n*Ln(2));
    x:= x + DotSize;
end;
y:= y + DotSize;
end;
{ Fremhæv ækvipotentialer }
FloatArea.MarkLine(Ln(1.0100), Gray(0), 0.007);
FloatArea.MarkLine(Ln(1.0201), Gray(0), 0.01);
FloatArea.MarkLine(Ln(1.0406), Gray(0), 0.02);
FloatArea.MarkLine(Ln(1.0829), Gray(0), 0.04);
FloatArea.MarkLine(Ln(1.1726), Gray(0), 0.01);
FloatArea.MarkLine(Ln(1.3749), Gray(0), 0.01);
FloatArea.Free;
Canvas.ExportPNG(FileName);
Canvas.Free;
end.

```